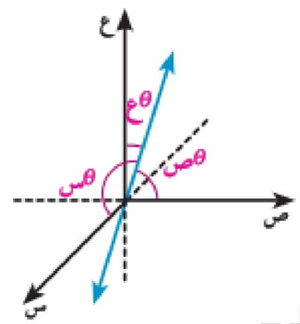
الوحدة الثانية
الخطوط المستقيمة والمستويات فى الفراغ

٢ - ١ معادلة المستقيم فى الفراغ

* متجه إتجاه المستقيم فى الفراغ :

إذا كانت $\theta_{س}$ ، $\theta_{ص}$ ، $\theta_{ع}$ هى زوايا إتجاه مستقيم فى الفراغ فإن جتا$\theta_{س}$ ، جتا$\theta_{ص}$ ، جتا$\theta_{ع}$ هى جيوب تمام إتجاه لهذا المستقيم ويرمز لها بالرموز ل ، م ، ن حيث:



ل = جتا$\theta_{س}$ ، م = جتا$\theta_{ص}$ ، ن = جتا$\theta_{ع}$

ويكون $ل^2 + م^2 + ن^2 = 1$

وبالتالى يكون المتجه $\overleftarrow{ى} = ل\,\overleftarrow{س} + م\,\overleftarrow{ص} + ن\,\overleftarrow{ع}$
هو متجه الوحدة فى إتجاه المستقيم

ويكون أى متجه موازى لمتجه الوحدة $\overleftarrow{ى}$ يسمى متجه إتجاه للمستقيم ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{هـ}$ أى أن:

$\overleftarrow{هـ} = ك(ل\,\overleftarrow{س} + م\,\overleftarrow{ص} + ن\,\overleftarrow{ع}) = (أ ، ب ، جـ)$

حيث أ ، ب ، جـ تتناسب مع ل ، م ، ن ، $ك \in ح^*$ ، أ ، ب ، جـ تسمى نسب إتجاه المستقيم

فمثلا: إذا كان $(\frac{1}{2} ، \frac{-1}{2} ، \frac{\sqrt{2}}{2})$ جيوب الإتجاه لمستقيم

فإن المتجه $\overleftarrow{هـ} = ك(\frac{1}{2} ، \frac{-1}{2} ، \frac{\sqrt{2}}{2})$ يمثل متجه إتجاه للمستقيم حيث $ك \neq$ صفر

بوضع ك = ٢ يكون $\overleftarrow{هـ} = (1 ، -1 ، \sqrt{2})$

وبوضع ك = ٤ يكون $\overleftarrow{هـ} = (2 ، -2 ، 2\sqrt{2})$ وهكذا

أى أن الخط المستقيم له عدد لانهائى من متجهات الإتجاه المتوازية وكل منها يوازى المستقيم

لاحظ أن:

ل ، م ، ن هى جيوب تمام إتجاه المستقيم ، أ ، ب ، جـ هى نسب إتجاه المستقيم

، $\overleftarrow{ى} = (ل ، م ، ن)$ متجه الوحدة للمستقيم ، $\overleftarrow{هـ} = (أ ، ب ، جـ)$ متجه إتجاه المستقيم

مثــــال:

أوجد متجه اتجاه كل من المستقيمات الآتية:

(أ) المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (−١، ٢، −٢)

(ب) المستقيم المار بالنقطتين ج (٠، −٢، ٣) ، د (١، ١، −١)

الحــــل:

(أ) ∵ المستقيم يمر بنقطة الأصل والنقطة (−١، ٢، −٢) ∴ $\overleftarrow{هـ}$ = (−١، ٢، −٢)

(ب) ∵ المستقيم يمر بالنقطتين ج (٠، −٢، ٣) ، د (١، ١، −١)

∴ متجه إتجاه المستقيم = $\overleftarrow{جد}$ = $\overleftarrow{د}$ − $\overleftarrow{ج}$ = (١، ١، −١) − (٠، −٢، ٣)

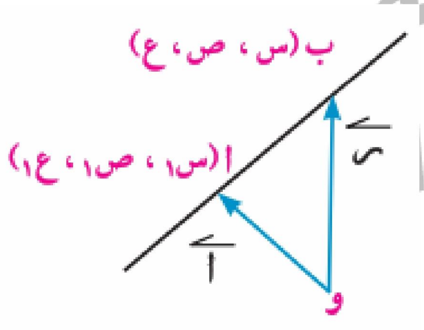
∴ $\overleftarrow{هـ}$ = (١، ٣، −٤)

✸ الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم فى الفراغ :

إذا كان ل مستقيم فى الفراغ متجه إتجاهه $\overleftarrow{هـ}$ = (أ، ب، ج)

ويمر بالنقطة أ التى متجه موضعها $\overleftarrow{أ}$ = ($س_1$، $ص_1$، $ع_1$)

فإذا كانت النقطة ب أى نقطة على المستقيم متجه موضعها



$\overleftarrow{ر}$ = (س، ص، ع) فمن الشكل نجد أن:

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{أ}$ + $\overleftarrow{أب}$ ، ∵ $\overleftarrow{أب}$ // $\overleftarrow{هـ}$ ∴ $\overleftarrow{أب}$ = ك $\overleftarrow{هـ}$

∴ $\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{أ}$ + ك $\overleftarrow{هـ}$

وهذه هى الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم فى الفراغ حيث أ نقطة على المستقيم ، $\overleftarrow{هـ}$ متجه إتجاه المستقيم ، ك عدد حقيقى لايعبر عن قيمة واحدة ثابتة إنما يأخذ قيما مختلفة لذلك يسمى بارامتر وعند كل قيمة للبارامتر ك تتحدد نقطة على المستقيم

أى أنه لإيجاد معادلة المستقيم فى الفراغ يلزم معرفة نقطة على المستقيم ومتجه إتجاه المستقيم

مثــــال:

أوجد الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٤، −٢، ٥) والمتجه (١، −٢، ٢) متجه إتجاه له.

ثم اوجد نقطة أخرى على هذا المستقيم.

✍ الحـــل:

∵ (٤، −٢، ٥) تمثل نقطة على المستقيم ∴ $\overrightarrow{أ}$ = (٤، −٢، ٥)

، ∵ (١، −٢، ٢) تمثل متجه إتجاه المستقيم ∴ $\overrightarrow{هـ}$ = (١، −٢، ٢)

∵ المعادلة المتجهه للمستقيم هى: $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{هـ}$

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٤، −٢، ٥) + ك (١، −٢، ٢)

ولإيجاد نقطة أخرى على المستقيم نعوض عن ك بأى قيمة حقيقية

بوضع ك = ١ ∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٥، −٤، ٧) متجه موضع نقطة اخرى على المستقيم

✸ المعادلات البارامترية للمستقيم فى الفراغ :

من المعادلة المتجهه للمستقيم $\overrightarrow{ر}$ = $\overrightarrow{أ}$ + ك $\overrightarrow{هـ}$

وبالتعويض عن $\overrightarrow{ر}$ = (س، ص، ع) ، $\overrightarrow{أ}$ = (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) ، $\overrightarrow{هـ}$ = (أ، ب، جـ)

∴ (س، ص، ع) = (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) + ك(أ، ب، جـ) = (س$_1$ + ك أ ، ص$_1$ + ك ب ، ع$_1$ + ك جـ)

بمساواة الإحداثيات المتناظرة نحصل على المعادلات البارامترية للمستقيم وهى:

س = س$_1$ + ك أ ، ص = ص$_1$ + ك ب ، ع = ع$_1$ + ك جـ

📖 مثـــال:

أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم المار بالنقطة (٢، ٣، −١) والمتجه (−١، ٢، ٣) متجه إتجاه له.

✍ الحـــل:

∵ الصورة المتجهه لمعادلة المستقيم هى:

$\overrightarrow{ر}$ = (٢، ٣، −١) + ك (−١، ٢، ٣)

∴ (س، ص، ع) = (٢، ٣، −١) + ك (−١، ٢، ٣)

∴ المعادلات البارامترية للمستقيم هى:

س = ٢ − ك ، ص = ٣ + ٢ك ، ع = −١ + ٣ك

✸ المعادلة الإحداثية للمستقيم فى الفراغ :

من المعادلات البارامترية للمستقيم

س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب ، ع = $ع_١$ + ك جـ   وبإيجاد ك من كل معادلة نجد ان:

$\frac{س - س_١}{أ} = ك$ ، $\frac{ص - ص_١}{ب} = ك$ ، $\frac{ع - ع_١}{جـ} = ك$

∴ المعادلة الإحداثية للمستقيم هى:

$$\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$$

ملاحظات هامة:

١) إذا كان أ = صفر فإن المعادلة الإحداثية تأخذ الصورة س = $س_١$ ، $\frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٢) إذا كان ب = صفر فإن المعادلة الإحداثية تأخذ الصورة ص = $ص_١$ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$

٣) إذا كان جـ = صفر فإن المعادلة الإحداثية تأخذ الصورة ع = $ع_١$ ، $\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب}$

٤) حيث أن نسب الإتجاه أ ، ب ، جـ تتناسب مع جيوب تمام الإتجاه ل ، م ، ن فإنه يمكن كتابة المعادلة الإحداثية للمستقيم فى الفراغ بالصورة

$$\frac{س - س_١}{ل} = \frac{ص - ص_١}{م} = \frac{ع - ع_١}{ن}$$

٥) يتم إيجاد جيوب تمام الإتجاه من نسب الإتجاه من العلاقة (ل ، م ، ن) = $\frac{(أ ، ب ، جـ)}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + جـ^٢}}$

٦) الصورة القياسية لمعادلة المستقيم الإحداثية هى:

$\frac{س - س_١}{أ} = \frac{ص - ص_١}{ب} = \frac{ع - ع_١}{جـ}$ والتى يكون فيها:

- معامل س = معامل ص = معامل ع = ١
- الإشارة سالبة بين حدى البسط فى النسب الثلاثة

وإذا تحقق هذان الشرطان فإن:

قيم المقام (أ ، ب ، جـ) تكون هى متجه الإتجاه للمستقيم ، ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$) تكون نقطة على المستقيم

✸ حالات خاصة:

اولا: معادلات المستقيم المار بنقطة الأصل

إذا كان المتجه $\overrightarrow{\text{هـ}} = (\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ})$ متجه إتجاه المستقيم فإن:

المعادلة المتجهه	المعادلة الإحداثية	المعادلات البارامترية
$\overrightarrow{\text{ر}} = \text{ك}(\text{أ}، \text{ب}، \text{جـ})$	$\frac{\text{س}}{\text{أ}} = \frac{\text{ص}}{\text{ب}} = \frac{\text{ع}}{\text{جـ}}$	س = ك أ ، ص = ك ب ، ع = ك جـ

ثانيا: معادلات محاور الإحداثيات:

معادلة محور س	معادلة محور ص	معادلة محور ع
ص = ٠ ، ع = ٠	س = ٠ ، ع = ٠	س = ٠ ، ص = ٠

ثالثا: معادلة المستقيم المار بالنقطة $(\text{س}_1، \text{ص}_1، \text{ع}_1)$ ويوازى أحد محاور الإحداثيات:

معادلة المستقيم الموازى لمحور س	معادلة المستقيم الموازى لمحور ص	معادلة المستقيم الموازى لمحور ع
$\text{ص} = \text{ص}_1$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1$	$\text{س} = \text{س}_1$ ، $\text{ع} = \text{ع}_1$	$\text{س} = \text{س}_1$ ، $\text{ص} = \text{ص}_1$

مثـــال:

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣، ٢، ٠) ، (−١، ٣، ٤)

الحـــل:

∵ متجه إتجاه المستقيم $\overrightarrow{\text{هـ}}$ = (−١، ٣، ٤) − (٣، ٢، ٠) = (−٤، ١، ٤)

∴ المعادلة المتجهه للمستقيم هى: $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٣، ٢، ٠) + ك(−٤، ١، ٤)

، المعادلات البارامترية للمستقيم هى: س = ٣ − ٤ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٤ك

، المعادلة الإحداثية للمستقيم هى: $\frac{\text{س} - ٣}{-٤} = \frac{\text{ص} - ٢}{١} = \frac{\text{ع}}{٤}$

مثـــال:

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٢} = \frac{٤ - \text{ع}}{٤}$ ثم اوجد نقطة أخرى على المستقيم.

الحـــل:

بفرض أن $\frac{\text{س} + ٤}{٣} = \frac{٢\text{ص} + ٥}{٢} = \frac{٤ - \text{ع}}{٤} = \text{ك}$

∴ $\frac{\text{س}+٤}{٣}=\text{ك}$ ∴ س + ٤ = ٣ك ∴ س = −٤ + ٣ك

، $\frac{٢\text{ص}+٥}{٢}=\text{ك}$ ∴ ٢ص + ٥ = ٢ك ∴ ٢ص = −٥ + ٢ك ∴ ص = $\frac{-٥}{٢}+\text{ك}$

، $\frac{٤-\text{ع}}{٤}=\text{ك}$ ∴ ٤ − ع = ٤ك ∴ −ع = −٤ + ٤ك ∴ ع = ٤ − ٤ك

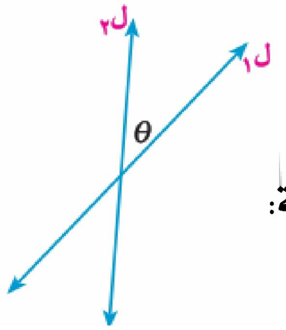
∴ المعادلات البارامترية هى: س = −٤ + ٣ك ، ص = $\frac{-٥}{٢}+\text{ك}$ ، ع = ٤ − ٤ك

∴ متجه إتجاه المستقيم $\vec{\text{هـ}}$ = (٣، ١، −٤) ، $\vec{\text{أ}}$ = $(-٤، \frac{-٥}{٢}، ٤)$

∴ المعادلة المتجهه للمستقيم هى: $\vec{\text{ر}} = (-٤، \frac{-٥}{٢}، ٤) + \text{ك}(٣، ١، -٤)$

لإيجاد نقطة أخرى على المستقيم نضع ك = ١ ∴ $\vec{\text{ر}} = (-١، \frac{-٣}{٢}، ٠)$ متجه موضع نقطة أخرى

✸ الزاوية بين مستقيمين فى الفراغ:



إذا كان $\text{ل}_1، \text{ل}_2$ مستقيمين فى الفراغ متجهى إتجاهيهما $\vec{\text{هـ}}_1 = (\text{أ}_1، \text{ب}_1، \text{جـ}_1)$

، $\vec{\text{هـ}}_2 = (\text{أ}_2، \text{ب}_2، \text{جـ}_2)$ فإن قياس الزاوية الصغرى بين المستقيمين تعطى بالعلاقة:

$$\text{جتا}\,\theta = \frac{|\vec{\text{هـ}}_1 \cdot \vec{\text{هـ}}_2|}{||\vec{\text{هـ}}_1||\;||\vec{\text{هـ}}_2||}$$

وإذا كان $(\text{ل}_1، \text{م}_1، \text{ن}_1)$ ، $(\text{ل}_2، \text{م}_2، \text{ن}_2)$ جيوب تمام الإتجاه للمستقيمين فإن:

$$\text{جتا}\,\theta = |\text{ل}_1\text{ل}_2 + \text{م}_1\text{م}_2 + \text{ن}_1\text{ن}_2|$$

مثال:

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين

ل_1: س = ٢ − ٥ك ، ص = ١ − ك ، ع = ٣ + ٤ك ، ل_2: $\frac{\text{س}+١}{٣} = \frac{٢-\text{ص}}{٤} = \frac{\text{ع}}{٢}$

الحل:

∵ $ل_١$: $س = ٢ - ٥ك$ ، $ص = ١ - ك$ ، $ع = ٣ + ٤ك$ ∴ $\overleftarrow{هـ_١} = (-٥، -١، ٤)$

، ∵ $ل_٢$: $\frac{س + ١}{٣} = \frac{٢ - ص}{٤} = \frac{ع}{٢}$ ∴ $\overleftarrow{هـ_٢} = (٣، -٤، ٢)$

$$∴ جتا θ = \frac{\left|\overleftarrow{هـ_١} • \overleftarrow{هـ_٢}\right|}{\left\|\overleftarrow{هـ_١}\right\| \left\|\overleftarrow{هـ_٢}\right\|} = \frac{\left|(-٥، -١، ٤) • (٣، -٤، ٢)\right|}{\sqrt{(-٥)^٢ + (-١)^٢ + ٤^٢} \times \sqrt{٣^٢ + (-٤)^٢ + ٢^٢}}$$

$$= \frac{\left|-١٥ + ٤ + ٨\right|}{\sqrt{٤٢} \times \sqrt{٢٩}} = \frac{٣}{\sqrt{٤٢ \times ٢٩}} \quad ∴ θ = جتا^{-١}\left(\frac{٣}{\sqrt{٤٢ \times ٢٩}}\right) \simeq ٨٥,٠٧°$$

مثـــال:

أوجد قياس الزاوية بين المستقيمين اللذين جيوب تمام إتجاههما هى: $\left(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣}\right)$ ، $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠\right)$

الحـــل:

∵ $(ل_١، م_١، ن_١) = \left(\frac{٢}{٣}، \frac{-٢}{٣}، \frac{١}{٣}\right)$ ، $(ل_٢، م_٢، ن_٢) = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}}، \frac{١}{\sqrt{٢}}، ٠\right)$

$$∴ جتا θ = \left|ل_١ل_٢ + م_١م_٢ + ن_١ن_٢\right| = \left|\frac{٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{-٢}{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{٣} \times ٠\right| = ٠ \quad ∴ θ = ٩٠°$$

✸ المستقيمان المتوازيان فى الفراغ :

إذا كان $\overleftarrow{هـ_١} = (أ_١، ب_١، جـ_١)$ ، $\overleftarrow{هـ_٢} = (أ_٢، ب_٢، جـ_٢)$ هما متجهى إتجاه المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ فإن:

$ل_١ \parallel ل_٢$ إذا وفقط إذا كان $\overleftarrow{هـ_١} \parallel \overleftarrow{هـ_٢}$ وهذا الشرط يمكن تحقيقه بصور مختلفة هى:

١ – $\overleftarrow{هـ_١} = ك\overleftarrow{هـ_٢}$

٢ – $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

٣ – $\overleftarrow{هـ_١} \times \overleftarrow{هـ_٢} = \overleftarrow{٠}$

ملاحظات:

١) إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيان ووجدت نقطة على أحدهما تحقق الآخر فإن المستقيمين منطبقان.

٢) إذا كان $\overleftarrow{هـ_١}$ لايوازى $\overleftarrow{هـ_٢}$ فإن $ل_١$ ، $ل_٢$ متقاطعان أو متخالفان.

✸المستقيمان المتعامدان فى الفراغ :

إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} = (أ_1 ، ب_1 ، جـ_1)$ ، $\overrightarrow{هـ_2} = (أ_2 ، ب_2 ، جـ_2)$ هما متجهى إتجاه المستقيمين $ل_1 ، ل_2$ فإن:

$ل_1 \perp ل_2$ إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{هـ_1} \bullet \overrightarrow{هـ_2} =$ صفر أى أن **$أ_1 أ_2 + ب_1 ب_2 + جـ_1 جـ_2 = ٠$**

مثـــال:

أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_1} = (٣ ، -٣ ، ٥) + ك_1 (٠ ، -٥ ، ٥)$

، $\overrightarrow{ر_2} = (-٢ ، ٣ ، ١) + ك_2 (٥ ، -١ ، -١)$ متعامدان ومتقاطعان فى نقطة وأوجد إحداثيات نقطة التقاطع.

الحـــل:

$\because \overrightarrow{هـ_1} = (٠ ، -٥ ، ٥)$ ، $\overrightarrow{هـ_2} = (٥ ، -١ ، -١)$

$\overrightarrow{هـ_1} \bullet \overrightarrow{هـ_2} = (٠ ، -٥ ، ٥) \bullet (٥ ، -١ ، -١) = ٠ + ٥ - ٥ = ٠$ $\therefore$ المستقيمان متعامدان

لإثبات أنهما متقاطعان نوجد قيمة لـ $ك_1$ وقيمة لـ $ك_2$ تجعلان $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

$\therefore (٣ ، -٣ ، ٥) + ك_1 (٠ ، -٥ ، ٥) = (-٢ ، ٣ ، ١) + ك_2 (٥ ، -١ ، -١)$ بمساواة المعاملات

$\therefore ٣ + ك_1 \times ٠ = -٢ + ٥ ك_2$ ومنها $٥ ك_2 = ٥$ $\therefore ك_2 = ١$

، $-٣ - ٥ ك_1 = ٣ - ك_2$ ومنها $-٥ ك_1 = ٦ - ١ = ٥$ $\therefore ك_1 = -١$

، $٥ + ٥ ك_1 = ١ - ك_2$ وقيمتى $ك_1 = -١$ ، $ك_2 = ١$ تحققان هذه المعادلة

$\therefore$ المستقيمان متقاطعان فى نقطة ومتجه نقطة تقاطعهما هو:

$\overrightarrow{ر} = (٣ ، -٣ ، ٥) + (-١)(٠ ، -٥ ، ٥) = (٣ ، ٢ ، ٠)$ $\therefore$ نقطة التقاطع هى $(٣ ، ٢ ، ٠)$

مثـــال:

أثبت أن المستقيمين : $\overrightarrow{ر_1} = (٣ ، -١ ، ٢) + ك_1 (٤ ، ١ ، ٣)$

، $\overrightarrow{ر_2} = (٠ ، ٤ ، -١) + ك_2 (١ ، -١ ، ٢)$ متخالفان

الحـــل:

لإثبات أنهما متخالفان نثبت أنه لا توجد أى قيم لـ $ك_1$ ، $ك_2$ تجعل $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

(٣، −١، ٢) + ك$_1$(٤، ١، ٣) = (٠، ٤، −١) + ك$_2$(١، −١، ٢)   بمساواة المعاملات

∴ ٣ + ٤ك$_1$ = ك$_2$ ومنها   ٤ك$_1$ − ك$_2$ = −٣   (١)

، −١ + ك$_1$ = ٤ − ك$_2$ ومنها   ك$_1$ + ك$_2$ = ٥   (٢)

، ٢ + ٣ك$_1$ = −١ + ٢ك$_2$ ومنها   ٣ك$_1$ − ٢ك$_2$ = −٣   (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ٥ك$_1$ = ٢   ∴ ك$_1$ = $\frac{٢}{٥}$ بالتعويض فى (٢)   ∴ ك$_2$ = ٥ − $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢٣}{٥}$

بالتعويض فى الطرف الأيمن للمعادلة (٣)   ∴ ٣ × $\frac{٢}{٥}$ − ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$ = −٨ ≠ الطرف الأيسر

∴ قيم ك$_1$ ، ك$_2$ لاتحقق المعادلة الثالثة   ∴ المستقيمان متخالفان

مثال:

أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع المستقيم $\vec{ر}$ = (٣، ١، ٤) + ك(٢، ١، ٣) على التعامد

الحل:

نفرض ان المستقيمان متقاطعان فى نقطة جـ   ∵ جـ ∈ ل$_1$ (المستقيم المعطى)

∴ $\vec{جـ}$ = (٣، ١، ٤) + ك(٢، ١، ٣)   ∴ جـ = (٣ + ٢ك، ١ + ك، ٤ + ٣ك)

∵ $\vec{هـ}_1$ = (٢، ١، ٣)   ، $\vec{هـ}_2$ = $\vec{وجـ}$ = (٣ + ٢ك، ١ + ك، ٤ + ٣ك)

∵ المستقيمان متعامدان   ∴ $\vec{هـ}_1$ • $\vec{هـ}_2$ = ٠

∴ (٢، ١، ٣) • (٣ + ٢ك، ١ + ك، ٤ + ٣ك) = ٠

∴ ٦ + ٤ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ك = ٠   ∴ ١٤ك = −١٩   ∴ ك = $\frac{-١٩}{١٤}$

∴ $\vec{هـ}_2$ = (٣ + ٢ × $\frac{-١٩}{١٤}$ ، ١ + $\frac{-١٩}{١٤}$ ، ٤ + ٣ × $\frac{-١٩}{١٤}$)

∴ $\vec{هـ}_2$ = ($\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{-٥}{١٤}$ ، $\frac{-١}{١٤}$) = (٤، −٥، −١)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى: $\vec{ر}$ = (٠، ٠، ٠) + ك(٤، −٥، −١)

مثــــال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣، −١، ٠) وعمودى على المستقيم $\vec{ر}$ = (٢،١،١) + ك(١،٢، −١)

الحــــل:

نفرض ان المستقيمان متقاطعان فى نقطة جـ ∵ جـ ∈ $ل_1$ (المستقيم المعطى)

∴ $\vec{جـ}$ = (٢،١،١) + ك(١،٢، −١) ∴ جـ = (٢ + ك ، ١ + ٢ك ، ١ − ك)

∵ النقطة المار بها المستقيم المطلوب هى أ = (٣، −١، ٠)

∴ $\vec{هـ_2}$ = $\vec{أجـ}$ = $\vec{جـ}$ − $\vec{أ}$ = (٢ + ك ، ١ + ٢ك ، ١ − ك) − (٣، −١، ٠)

= (−١ + ك ، ٢ + ٢ك ، ١ − ك)

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $\vec{هـ_1}$ • $\vec{هـ_2}$ = ٠ حيث $\vec{هـ_1}$ = (١،٢، −١) ،

∴ (٣، −١، ٠) • (−١ + ٢ك ، ٢ + ٢ك ، ١ − ك) = ٠

∴ −٣ + ٦ك − ٢ − ٢ك + ٠ = ٠ ∴ ٤ك = ٥ ∴ ك = $\frac{٥}{٤}$

∴ $\vec{هـ_2}$ = (−١ + ٢ × $\frac{٥}{٤}$ ، ٢ + ٢ × $\frac{٥}{٤}$ ، ١ − $\frac{٥}{٤}$)

∴ $\vec{هـ_2}$ = ($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{-١}{٤}$) = (٣، ٩، $\frac{-١}{٢}$)

∴ معادلة المستقيم المطلوب هى: $\vec{ر}$ = (٣، −١، ٠) + ك(٣، ٩، $\frac{-١}{٢}$)

مثــــال:

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢، −١، ٣) ونقطة تقاطع المستقيمين

$\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٣}$ ، $\frac{س - ٣}{٤} = \frac{ص - ٥}{٥} = \frac{ع - ٦}{٣}$

الحــــل:

المعادلات البارامترية للمستقيم $ل_1$	المعادلات البارامترية للمستقيم $ل_2$
بوضع $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٣} = ك_1$	بوضع $\frac{س - ٣}{٤} = \frac{ص - ٥}{٥} = \frac{ع - ٦}{٣} = ك_2$
∴ س = ١ + ٢$ك_1$	∴ س = ٣ + ٤$ك_2$

، $\text{ص} = ٢ + ٣\text{ك}_١$	، $\text{ص} = ٥ + ٥\text{ك}_٢$
، $\text{ع} = ٣ + ٣\text{ك}_١$	، $\text{ع} = ٦ + ٣\text{ك}_٢$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة

$\therefore ١ + ٢\text{ك}_١ = ٣ + ٤\text{ك}_٢$ $\quad \therefore ٢\text{ك}_١ - ٤\text{ك}_٢ = ٢$ $\quad \therefore \text{ك}_١ - ٢\text{ك}_٢ = ١$ (١)

، $٢ + ٣\text{ك}_١ = ٥ + ٥\text{ك}_٢$ $\quad \therefore ٣\text{ك}_١ - ٥\text{ك}_٢ = ٣$ (٢)

، $٣ + ٣\text{ك}_١ = ٦ + ٣\text{ك}_٢$ $\quad \therefore ٣\text{ك}_١ - ٣\text{ك}_٢ = ٣$ $\quad \therefore \text{ك}_١ - \text{ك}_٢ = ١$ (٣)

بطرح (١) ، (٣) $\therefore -\text{ك}_٢ = ٠$ $\quad \therefore \text{ك}_٢ = ٠$ بالتعويض فى (١) $\therefore \text{ك}_١ = ١$

$\because \text{ك}_١ = ١$ ، $\text{ك}_٢ = ٠$ تحققان المعادلة رقم (٢) $\therefore$ نقطة التقاطع هى (٣، ٥، ٦)

$\therefore$ المستقيم يمر بالنقطتين (٢، −١، ٣) ، (٣، ٥، ٦)

$\therefore$ متجه إتجاه المستقيم $\overleftarrow{\text{ه}} = (٣، ٥، ٦) - (٢، -١، ٣) = (١، ٦، ٣)$

$\therefore$ معادلة المستقيم المطلوب هى: $\overleftarrow{\text{ر}} = (٢، -١، ٣) + \text{ك}(١، ٦، ٣)$

مثال:

أوجد قيمة ن التى تجعل المستقيمين $\text{ل}_١$ ، $\text{ل}_٢$ متقاطعان فى نقطة ، وأوجد نقطة تقاطعهما حيث:

$\text{ل}_١: \overleftarrow{\text{ر}}_١ = (٣، -١، \text{ن}) + \text{ك}_١(٤، ١، ٣)$ ، $\text{ل}_٢: \text{س} = \frac{\text{ص} - ٤}{-١} = \frac{\text{ع} + ١}{٢}$

الحـــل:

المعادلات البارامترية للمستقيم $\text{ل}_١$	المعادلات البارامترية للمستقيم $\text{ل}_٢$
$\because (\text{س}، \text{ص}، \text{ع}) = (٣، -١، \text{ن}) + \text{ك}_١(٤، ١، ٣)$	بوضع $\text{س} = \frac{\text{ص} - ٤}{-١} = \frac{\text{ع} + ١}{٢} = \text{ك}_٢$
$\therefore \text{س} = ٣ + ٤\text{ك}_١$	$\therefore \text{س} = \text{ك}_٢$
، $\text{ص} = -١ + \text{ك}_١$	، $\text{ص} = ٤ - \text{ك}_٢$
، $\text{ع} = \text{ن} + ٣\text{ك}_١$	، $\text{ع} = -١ + ٢\text{ك}_٢$

بمساواة الإحداثيات المتناظرة

$\therefore ٣ + ٤\text{ك}_١ = \text{ك}_٢$ $\quad \therefore ٤\text{ك}_١ - \text{ك}_٢ = -٣$ (١)

، $-١ + \text{ك}_١ = ٤ - \text{ك}_٢$ $\quad \therefore \text{ك}_١ + \text{ك}_٢ = ٥$ (٢)

، $\text{ن} + ٣\text{ك}_١ = -١ + ٢\text{ك}_٢$ $\quad \therefore ٣\text{ك}_١ - ٢\text{ك}_٢ = -١ - \text{ن}$ (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

∴ ٥ك$_{١}$ = ٢ ∴ ك$_{١}$ = $\frac{٢}{٥}$ بالتعويض فى (٢) ∴ ك$_{٢}$ = ٥ − $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢٣}{٥}$

∵ المستقيمان متقاطعان فى نقطة ∴ ك$_{١}$، ك$_{٢}$ تحققان المعادلة (٣)

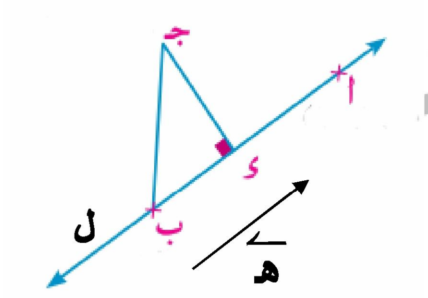
∴ ٣ × $\frac{٢}{٥}$ − ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$ = −١ − ن ∴ −٨ = −١ − ن **∴ ن = ٧**

بالتعويض عن ك$_{١}$ = $\frac{٢}{٥}$ فى المعادلات البارامترية للمستقيم ل$_{١}$

∴ س = ٣ + ٤ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢٣}{٥}$ ، ص = −١ + $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{-٣}{٥}$ ، ع = ٧ + ٣ × $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٤١}{٥}$

∴ نقطة التقاطع هى ($\frac{٢٣}{٥}$ ، $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٤١}{٥}$)

✷ المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ :



بفرض أن المستقيم ل فى الفراغ يمر بالنقطتين أ ، ب
ولإيجاد بعد النقطة جـ عن المستقيم ل اى البعدالعمودى جـ ء
نتبع الخطوات الآتية:

١) نوجد المتجه $\overleftarrow{بجـ}$ ثم نوجد معياره $\|\overleftarrow{بجـ}\|$

٢) نوجد طول مسقط $\overleftarrow{بجـ}$ فى إتجاه $\overleftarrow{بأ}$ أى طول ب ء من العلاقة:

ب ء = $\frac{|\overleftarrow{بجـ} \bullet \overleftarrow{بأ}|}{\|\overleftarrow{بأ}\|}$ أو ب ء = $\frac{|\overleftarrow{بجـ} \bullet \overleftarrow{هـ}|}{\|\overleftarrow{هـ}\|}$ حيث $\overleftarrow{هـ}$ متجه إتجاه المستقيم ل

٣) نوجد البعد العمودى جـ ء من نظرية فيثاغورث حيث جـ ء = $\sqrt{(بجـ)^{٢} - (ب ء)^{٢}}$

تذكر أن:

إذا كانت نقطة أ فى الفراغ حيث إحداثيات أ فى نظام ثلاثى الأبعاد هى (س ، ص ، ع) فإن:

بعد النقطة أ (س ، ص ، ع)	
عن محور س = $\sqrt{ص^{٢} + ع^{٢}}$	عن المستوى الإحداثى س ص = $\lvert ع \rvert$
عن محور ص = $\sqrt{س^{٢} + ع^{٢}}$	عن المستوى الإحداثى س ع = $\lvert ص \rvert$
عن محور ع = $\sqrt{س^{٢} + ص^{٢}}$	عن المستوى الإحداثى ص ع = $\lvert س \rvert$

مثال:

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢، ١، −٤) على المستقيم $\vec{ر}$ = (١، −١، ٢) + ك(٢، ٣، −٢)

الحل:

بفرض أن النقطة على المستقيم ب = (١، −١، ٢) ، والنقطة خارج المستقيم جـ = (٢، ١، −٤)

∴ $\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٢، ١، −٤) − (١، −١، ٢) = (١، ٢، −٦)

∴ $||\overrightarrow{بجـ}|| = \sqrt{١^٢ + ٢^٢ + (-٦)^٢} = \sqrt{٤١}$

∵ متجه إتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = (٢، ٣، −٢) ∴ $||\overrightarrow{هـ}|| = \sqrt{٢^٢ + ٣^٢ + (-٢)^٢} = \sqrt{١٧}$

∴ مسقط $\overrightarrow{بجـ}$ على المستقيم = بى = $\dfrac{|\overrightarrow{بجـ} \bullet \overrightarrow{هـ}|}{||\overrightarrow{هـ}||}$

∴ بى = $\dfrac{|(١، ٢، -٦) \bullet (٢، ٣، -٢)|}{\sqrt{١٧}} = \dfrac{|٢ + ٦ + ١٢|}{\sqrt{١٧}} = \dfrac{٢٠}{\sqrt{١٧}}$

∴ طول العمود جى = $\sqrt{(بجـ)^٢ - (بى)^٢} = \sqrt{(\sqrt{٤١})^٢ - (\dfrac{٢٠}{\sqrt{١٧}})^٢} \simeq ٤,١٨$ وحدة طول

مثال:

أوجد بعد النقطة (−٢، ٣، −٤) عن الخط المستقيم $\dfrac{س + ٢}{٣} = \dfrac{٢ص + ٣}{٤} = \dfrac{٣ع + ٤}{٥}$

الحل:

نضع معادلة المستقيم على الصورة القياسية ∴ $\dfrac{س + ٢}{٣} = \dfrac{ص + \frac{٣}{٢}}{٢} = \dfrac{ع + \frac{٤}{٣}}{\frac{٥}{٣}}$

∴ متجه إتجاه المستقيم $\overrightarrow{هـ}$ = $(٣، ٢، \frac{٥}{٣})$ والنقطة على المستقيم هى ب = $(-٢، \frac{-٣}{٢}، \frac{-٤}{٣})$

، ∵ النقطة خارج المستقيم جـ = (−٢، ٣، −٤)

∴ $\overrightarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{جـ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = $(-٢، ٣، -٤) - (-٢، \frac{-٣}{٢}، \frac{-٤}{٣}) = (٠، \frac{٩}{٢}، \frac{-٨}{٣})$

∴ $\|\overrightarrow{\text{بجـ}}\| = \sqrt{(٠)^٢ + (\frac{٩}{٢})^٢ + (\frac{-٨}{٣})^٢} = \frac{\sqrt{٩٨٥}}{٦}$

∵ متجه إتجاه المستقيم $\overrightarrow{\text{ه}} = (٣، ٢، \frac{٥}{٣})$ ∴ $\|\overrightarrow{\text{ه}}\| = \sqrt{٣^٢ + ٢^٢ + (\frac{٥}{٣})^٢} = \frac{\sqrt{١٤٢}}{٣}$

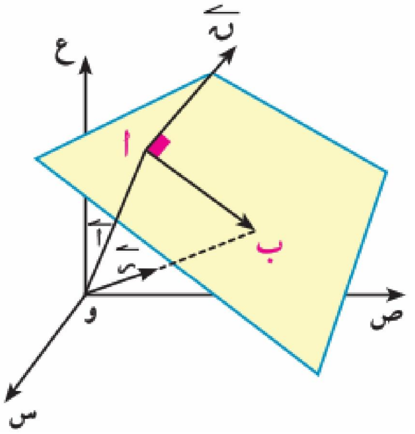
∴ مسقط $\overrightarrow{\text{بجـ}}$ على المستقيم = بى $= \dfrac{|\overrightarrow{\text{بجـ}} \bullet \overrightarrow{\text{ه}}|}{\|\overrightarrow{\text{ه}}\|}$

∴ بى $= \dfrac{|(٠، \frac{٩}{٢}، \frac{-٨}{٣}) \bullet (٣، ٢، \frac{٥}{٣})|}{\frac{\sqrt{١٤٢}}{٣}} = \dfrac{٣|٠ + ٩ - \frac{٤٠}{٩}|}{\sqrt{١٤٢}} = \dfrac{٤١}{٣\sqrt{١٤٢}}$

∴ طول العمود جى $= \sqrt{(\text{بجـ})^٢ - (\text{بى})^٢} = \sqrt{(\frac{\sqrt{٩٨٥}}{٦})^٢ - (\frac{٤١}{٣\sqrt{١٤٢}})^٢} \simeq ٥,١$ وحدة طول

٢ - ٢ معادلة المستوى فى الفراغ

✱ الصورة المتجهه لمعادلة المستوى فى الفراغ :



إذا كانت النقطة أ التى متجه موضعها $\overleftarrow{أ}$ = (س١، ص١، ع١)

تقع على المستوى وكان $\overleftarrow{ن}$ = (أ، ب، جـ) متجه إتجاه عمودى على المستوى وكانت النقطة ب أى نقطة على المستوى ومتجه موضعها

$\overleftarrow{ر}$ = (س، ص، ع) فإن:

$\overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{أب} = ٠$ ، ∵ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$ ، $\overleftarrow{ب} = \overleftarrow{ر}$

∴ $\overleftarrow{ن} \bullet (\overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}) = ٠$ ∴ $\overleftarrow{ن} \bullet (\overleftarrow{ر} - \overleftarrow{أ}) = ٠$ ∴ $\overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{ر} - \overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{أ} = ٠$

$$∴ \overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{أ}$$

وهذه هى الصورة المتجهه لمعادلة المستوى فى الفراغ حيث أ نقطة على المستوى ، $\overleftarrow{ن}$ متجه إتجاه عمودى على المستوى ، $\overleftarrow{ر}$ متجه موضع أى نقطة على المستوى.

أى أنه لإيجاد معادلة المستوى فى الفراغ يلزم معرفة نقطة على المستوى ومتجه الإتجاه العمودى على المستوى

مثـــال:

أوجد الصورة المتجهه لمعادلة المستوى المار بالنقطة (٢، –٣، ١) والمتجه (١، –٢، ٣) عمودى على المستوى.

الحـــل:

∵ $\overleftarrow{أ}$ = (٢، –٣، ١) ، $\overleftarrow{ن}$ = (١، –٢، ٣)

المعادلة المتجهه للمستوى هى $\overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{أ}$

∴ (١، –٢، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = (١، –٢، ٣) • (٢، –٣، ١)

∴ (١، –٢، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = ٢ + ٦ + ٣ ∴ (١، –٢، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = ١١

✸ الصورة القياسية والعامة لمعادلة المستوى فى الفراغ :

من المعادلة المتجهه للمستوى $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet (\overrightarrow{\text{ر}} - \overrightarrow{\text{أ}}) = ٠$

بوضع $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ) ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س، ص، ع) ، $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$)

∴ (أ، ب، جـ) • { (س، ص، ع) − (س$_1$، ص$_1$، ع$_1$) } = ٠

∴ (أ، ب، جـ) • (س − س$_1$، ص − ص$_1$، ع − ع$_1$) = ٠

∴ أ(س − س$_1$) + ب(ص − ص$_1$) + جـ(ع − ع$_1$) = ٠

وهذه هى الصورة القياسية لمعادلة المستوى فى الفراغ

وبفك الأقوس والتجميع نحصل على:

∴ أس − أس$_1$ + ب ص − ب ص$_1$ + جـ ع − جـ ع$_1$ = ٠

∴ أس + ب ص + جـ ع + (−أس$_1$ − ب ص$_1$ − جـ ع$_1$) = ٠

وبفرض أن (−أس$_1$ − ب ص$_1$ − جـ ع$_1$) = د

∴ أس + ب ص + جـ ع + د = ٠

وهذه هى الصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ

ملاحظة:

من المعادلة المتجهه للمستوى $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$ نلاحظ أن: $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$ = −د

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}}$ = −د وبوضع $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (أ، ب، جـ) ، $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (س، ص، ع)

∴ (أ، ب، جـ) • (س، ص، ع) = −د

وهذه صورة أخرى للصورة العامة لمعادلة المستوى فى الفراغ

مثـــال:

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقطة (−٣، ٤، ٢) والمتجه (١، −١، ٣) عمودى على المستوى.

الحـــل:

∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (−٣، ٤، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (١، −١، ٣)

∴ المعادلة المتجهه للمستوى هى $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ (١، −١، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = (١، −١، ٣) • (−٣، ٤، ٢)

∴ (١، −١، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = −٣ − ٤ + ٦

∴ (١، −١، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = −١

الصورة القياسية لمعادلة المستوى هى: أ(س − س$_{1}$) + ب(ص − ص$_{1}$) + جـ(ع − ع$_{1}$) = ٠

∴ (س + ٣) − (ص − ٤) + ٣(ع − ٢) = ٠

بفك الأقواس وتجميع الحدود المتشابهه نحصل على الصورة العامة لمعادلة المستوى

∴ س + ٣ − ص + ٤ + ٣ع − ٦ = ٠

∴ س − ص + ٣ع + ١ = ٠

ملاحظة:

يمكن الحصول على المعادلة العامة من المعادلة المتجهه كما يلى:

∵ (١، −١، ٣) • $\overleftarrow{ر}$ = −١   ∴ (١، −١، ٣) • (س، ص، ع) = −١

∴ س − ص + ٣ع = −١

∴ س − ص + ٣ع + ١ = ٠

✸ حالات خاصة:

اولا: معادلة المستوى المار بنقطة الأصل (د = ٠) هى:

أس + ب ص + جـ ع = ٠

ثانيا: معادلة المستوى الموازى لأحد المحاور (عمودى على أحد مستويات الإحداثيات)

المستوى يوازى محور س	المستوى يوازى محور ص	المستوى يوازى محور ع
∴ ب ص + جـ ع + د = ٠	∴ أس + جـ ع + د = ٠	∴ أس + ب ص + د = ٠

ثالثا: معادلة المستوى المار بأحد المحاور

المستوى يمر بمحور س	المستوى يمر بمحور ص	المستوى يمر بمحور ع
∴ ب ص + جـ ع = ٠	∴ أس + جـ ع = ٠	∴ أس + ب ص = ٠

رابعا: معادلة المستوى العمودى على أحد المحاور (يوازى أحد مستويات الإحداثيات)

المستوى عمودى على محور س	المستوى عمودى على محور ص	المستوى عمودى على محور ع
س = س$_{1}$	ص = ص$_{1}$	ع = ع$_{1}$

مثـــال:

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستوى المار بالنقط أ = (١، ٠، ٠)، ب = (٠، ٢، ٠) ، جـ = (٠، ٠، ٣)

الحـــل:

اولا: يجب التأكد أن النقط لا تقع على إستقامة واحدة

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٠،٢،٠) - (١،٠،٠) = (-١،٢،٠)$

، $\overrightarrow{\text{أجـ}} = \overrightarrow{\text{جـ}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٠،٠،٣) - (١،٠،٠) = (-١،٠،٣)$

∴ $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} = \frac{-١}{-١} = ١$ ∴ $\frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢} = \frac{٠}{٢} = ٠$ ∴ $\frac{\text{أ}_١}{\text{أ}_٢} \neq \frac{\text{ب}_١}{\text{ب}_٢}$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ لايوازى $\overrightarrow{\text{أجـ}}$ ∴ النقط أ ، ب ، جـ ليست على إستقامة واحدة

ثانيا: يجب إيجاد متجه العمودى على المستوى بإيجاد حاصل الضرب الإتجاهى للمتجهين $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{أجـ}}$

$$\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أجـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & ٢ & ٠ \\ -١ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٦\,\overrightarrow{\text{س}} - ٣\,\overrightarrow{\text{ص}} + ٢\,\overrightarrow{\text{ع}}$$

∴ الصورة المتجهه لمعادلة المستوى هى $\overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \bullet \overrightarrow{\text{أ}}$

∴ $(٦،-٣،٢) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = (٦،-٣،٢) \bullet (١،٠،٠)$

∴ $(٦،-٣،٢) \bullet \overrightarrow{\text{ر}} = ٦$

والصورة القياسية لمعادلة المستوى هى:

$\text{أ}(\text{س} - \text{س}_١) + \text{ب}(\text{ص} - \text{ص}_١) + \text{جـ}(\text{ع} - \text{ع}_١) = ٠$

∴ $٦(\text{س} - ١) - ٣\text{ص} + ٢\text{ع} = ٠$

والصورة العامة لمعادلة المستوى هى:

$(٦،-٣،٢) \bullet (\text{س}،\text{ص}،\text{ع}) = ٦$

∴ $٦\text{س} - ٣\text{ص} + ٢\text{ع} - ٦ = ٠$

ملاحظة هامة:

معادلة المستوى الذي يمر بالنقط $(\text{س}_١،\text{ص}_١،\text{ع}_١)$ ، $(\text{س}_٢،\text{ص}_٢،\text{ع}_٢)$ ، $(\text{س}_٣،\text{ص}_٣،\text{ع}_٣)$ يمكن الحصول عليها بفك المحدد التالى:

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_١ & \text{ص} - \text{ص}_١ & \text{ع} - \text{ع}_١ \\ \text{س}_٢ - \text{س}_١ & \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ & \text{ع}_٢ - \text{ع}_١ \\ \text{س}_٣ - \text{س}_١ & \text{ص}_٣ - \text{ص}_١ & \text{ع}_٣ - \text{ع}_١ \end{vmatrix} = ٠$$

مثـــال:

أثبت أن المستقيمين : $ل_١ : ٢س = ٣ص = ٤ع$ ، $ل_٢ : ٣س = ٢ص = ٥ع$ متقاطعان
ثم اوجد معادلة المستوى الذى يحويهما

الحـــل:

∵ $ل_١ : ٢س = ٣ص = ٤ع$ ∴ $\frac{س}{\frac{١}{٢}} = \frac{ص}{\frac{١}{٣}} = \frac{ع}{\frac{١}{٤}}$ ∴ $ل_١$ يمر بنقطة الأصل

، ∵ $ل_٢ : ٣س = ٢ص = ٥ع$ ∴ $\frac{س}{\frac{١}{٣}} = \frac{ص}{\frac{١}{٢}} = \frac{ع}{\frac{١}{٥}}$ ∴ $ل_٢$ يمر بنقطة الأصل

∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة الأصل

ويكون متجه الإتجاه العمودى على المستوى هو حاصل الضرب الإتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{ه_١}$ ، $\overleftarrow{ه_٢}$

حيث $\overleftarrow{ه_١} = (\frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٤}) = ١٢ \times (\frac{١}{٢}، \frac{١}{٣}، \frac{١}{٤}) = (٦، ٤، ٣)$

، $\overleftarrow{ه_٢} = (\frac{١}{٣}، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٥}) = ٣٠ \times (\frac{١}{٣}، \frac{١}{٢}، \frac{١}{٥}) = (١٠، ١٥، ٦)$

∴ $\overleftarrow{ن} = \overleftarrow{ه_١} \times \overleftarrow{ه_٢} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix}$

$= (٢٤ - ٤٥)\overleftarrow{س} - (٣٦ - ٣٠)\overleftarrow{ص} + (٩٠ - ٤٠)\overleftarrow{ع}$

∴ $\overleftarrow{ن} = -٢١\overleftarrow{س} - ٦\overleftarrow{ص} + ٥٠\overleftarrow{ع}$

∴ الصورة المتجهه لمعادلة المستوى هى $\overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ن} \bullet \overleftarrow{أ}$ حيث $أ = (٠، ٠، ٠)$

∴ $(-٢١، -٦، ٥٠) \bullet \overleftarrow{ر} = (-٢١، -٦، ٥٠) \bullet (٠، ٠، ٠)$

∴ $(-٢١، -٦، ٥٠) \bullet \overleftarrow{ر} = ٠$

والصورة العامة لمعادلة المستوى هى:

$(-٢١، -٦، ٥٠) \bullet (س، ص، ع) = ٠$ ∴ $-٢١س - ٦ص + ٥٠ع = ٠$

∴ $٢١س + ٦ص - ٥٠ع = ٠$

وهى معادلة مستوى يمر بنقطة الأصل

مثال:

إوجد نقطة تقاطع المستقيم $\overleftarrow{ر}_١$ = (١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢) مع المستوى (٣، ٢، ٢) • $\overleftarrow{ر}_٢$ = −٢

الحل:

المستقيم يقطع المستوى عندما $\overleftarrow{ر}_١$ = $\overleftarrow{ر}_٢$ ∴ بالتعويض من معادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٣، ٢، ٢) • [(١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢)] = −٢

∴ (٣، ٢، ٢) • (١، ٤، ٢) + ك(٣، ٢، ٢) • (٣، ٢، ٢) = −٢

∴ (٣ + ٨ + ٤) + ك(٩ + ٤ + ٤) = −٢

∴ ١٧ك = −٢ − ١٥ = −١٧ ∴ ك = −١ بالتعويض فى معادلة المستقيم

∴ متجه موضع نقطة التقاطع هو $\overleftarrow{ر}$ = (١، ٤، ٢) + (−١)(٣، ٢، ٢) = (−٢، ٢، ٠)

∴ نقطة التقاطع هى (−٢، ٢، ٠)

حل آخر :

بكتابة المعادلة الإحداثية للمستقيم والمستوى

∴ معادلة المستقيم هى $\frac{\text{س} - ١}{٣} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٢}{٢}$

، معادلة المستوى هى ٣س + ٢ص + ٢ع = −٢

من معادلة المستوى ∴ س = $\frac{١}{٣}$ (−٢ − ٢ص − ٢ع)

بالتعويض فى معادلة المستقيم:

$$\frac{-٢ - ٢\text{ص} - ٢\text{ع} - ٣}{٩} = \frac{\text{ص} - ٤}{٢} = \frac{\text{ع} - ٢}{٢}$$

∴ ٩ص − ٣٦ = −٤ − ٤ص − ٤ع − ٦ ∴ ١٣ص + ٤ع = ٢٦ (١)

، ٢ص − ٨ = ٢ع − ٤ ∴ ٢ص − ٢ع = ٤ ∴ ص − ع = ٢ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) وذلك بضرب طرفى المعادلة (٢) فى ٤ وجمعها مع المعادلة (١)

∴ ١٧ص = ٣٤ **∴ ص = ٢** بالتعويض فى (٢) ∴ ٢ − ع = ٢ **∴ ع = ٠**

بالتعويض عن ص ، ع فى معادلة المستوى ∴ س = $\frac{١}{٣}$ (−٢ − ٢×٢ − ٠) **∴ س = −٢**

∴ نقطة التقاطع هى (−٢، ٢، ٠)

✱ معادلة المستوى بمعلومية الأجزاء المقطوعة من محاور الإحداثيات :

إذا قطع المستوى محاور الإحداثيات فى النقط $(\text{س}_1 ، ٠ ، ٠)$ ، $(٠ ، \text{ص}_1 ، ٠)$ ، $(٠ ، ٠ ، \text{ع}_1)$ فإن معادلة المستوى يمكن استنتاجها كما يلى:

∵ المعادلة العامة للمستوى هى $\text{أ س} + \text{ب ص} + \text{جـ ع} + \text{د} = ٠$

∴ بالتعويض بالنقط الثلاثة لأنها تقع فى المستوى فهى تحقق معادلته

∴ $\text{أ س}_1 + \text{د} = ٠$ ، $\text{ب ص}_1 + \text{د} = ٠$ ، $\text{جـ ع}_1 + \text{د} = ٠$

ومنها ∴ $\text{أ} = \frac{-\text{د}}{\text{س}_1}$ ، $\text{ب} = \frac{-\text{د}}{\text{ص}_1}$ ، $\text{جـ} = \frac{-\text{د}}{\text{ع}_1}$ بالتعويض فى معادلة المستوى

∴ $\frac{-\text{د}}{\text{س}_1} \times \text{س} + \frac{-\text{د}}{\text{ص}_1} \times \text{ص} + \frac{-\text{د}}{\text{ع}_1}\text{ع} = -\text{د}$ بقسمة الطرفين على $(-\text{د})$ فتكون المعادلة هى:

$$\frac{\text{س}}{\text{س}_1} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}_1} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1} = ١$$

🕮 مثـــال:

إوجدالأجزاء التى يقطعها $٢\text{س} + ٣\text{ص} - \text{ع} = ٦$ من محاور الإحداثيات

✍ الحــــل:

لإيجاد الأجزاء المقطوعة من المحاور نضع المعادلة على الصورة $\frac{\text{س}}{\text{س}_1} + \frac{\text{ص}}{\text{ص}_1} + \frac{\text{ع}}{\text{ع}_1} = ١$

∵ $٢\text{س} + ٣\text{ص} - \text{ع} = ٦$ بقسمة الطرفين على ٦

∴ $\frac{٢\text{س}}{٦} + \frac{٣\text{ص}}{٦} - \frac{\text{ع}}{٦} = ١$ ∴ $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{ع}}{-٦} = ١$

∴ أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور س ، ص ، ع هى ٣ ، ٢ ، ٦ على الترتيب

حل آخر:

لإيجاد الجزء المقطوع من محور س نضع ص = ٠ ، ع = ٠ ∴ $٢\text{س} = ٦$ ∴ $\text{س} = ٣$

ولإيجاد الجزء المقطوع من محور ص نضع س = ٠ ، ع = ٠ ∴ $٣\text{ص} = ٦$ ∴ $\text{ص} = ٢$

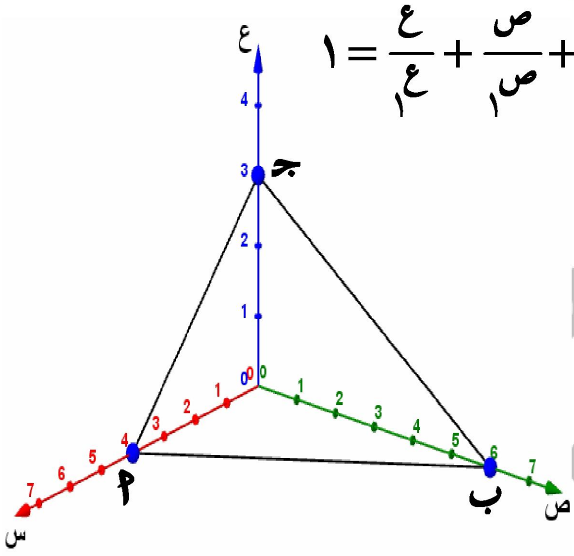
ولإيجاد الجزء المقطوع من محور ع نضع س = ٠ ، ص = ٠ ∴ $-\text{ع} = ٦$ ∴ $\text{ع} = -٦$

∴ أطوال الأجزاء المقطوعة من محاور س ، ص ، ع هى ٣ ، ٢ ، ٦ على الترتيب

مثال:

إذا قطع المستوى ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ محاور الإحداثيات س، ص، ع فى النقط أ، ب، جـ على الترتيب إحسب مساحة المثلث أ ب جـ

الحل:



لإيجاد نقط التقاطع مع المحاور نضع المعادلة على الصورة $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$

∵ ٣س + ٢ص + ٤ع = ١٢ بقسمة الطرفين على ١٢

∴ $\frac{٣س}{١٢} + \frac{٢ص}{١٢} + \frac{٤ع}{١٢} = ١$

∴ $\frac{س}{٤} + \frac{ص}{٦} + \frac{ع}{٣} = ١$

∴ نقط التقاطع مع المحاور هى:

أ = (٤، ٠، ٠) ، ب = (٠، ٦، ٠) ، جـ = (٠، ٠، ٣)

∴ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$ = (٠، ٦، ٠) − (٤، ٠، ٠) = (−٤، ٦، ٠)

، $\overleftarrow{أجـ} = \overleftarrow{جـ} - \overleftarrow{أ}$ = (٠، ٠، ٣) − (٤، ٠، ٠) = (−٤، ٠، ٣)

∴ $\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أجـ} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ١٨\overleftarrow{س} - ١٢\overleftarrow{ص} + ٢٤\overleftarrow{ع}$

∵ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢} ||\overleftarrow{أب} \times \overleftarrow{أجـ}||$

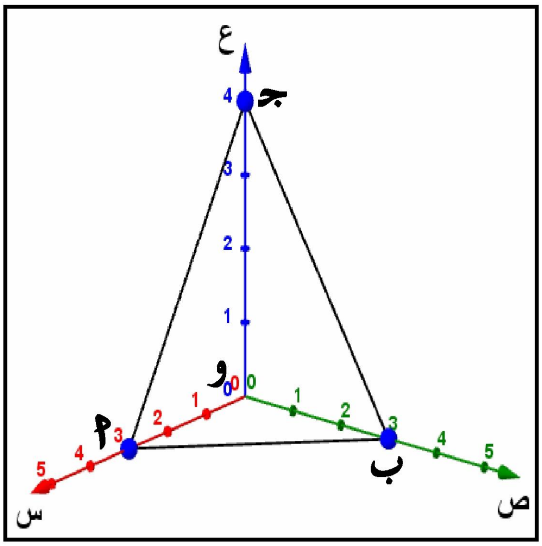
∴ مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٨^٢ + (-١٢)^٢ + ٢٤^٢} = ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة

مثال:

إوجد حجم الهرم المتكون من تقاطع المستوى ٢س + ٢ص + $\frac{٣}{٢}$ع = ٦ مع مستويات الإحداثيات الثلاثة

الحل:

لإيجاد نقط التقاطع مع المحاور نضع المعادلة على الصورة $\frac{س}{س_١} + \frac{ص}{ص_١} + \frac{ع}{ع_١} = ١$



∵ $٢س + ٢ص + \frac{٣}{٢}ع = ٦$ بقسمة الطرفين على ٦

∴ $\frac{٢س}{٦} + \frac{٢ص}{٦} + \frac{٣}{٢} \times \frac{ع}{٦} = ١$ ∴ $\frac{س}{٣} + \frac{ص}{٣} + \frac{ع}{٤} = ١$

∴ نقط التقاطع مع المحاور هى:

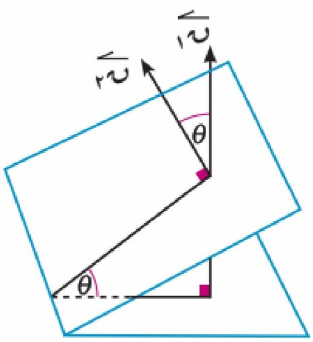
أ = (٣،٠،٠) ، ب = (٠،٣،٠) ، جـ = (٠،٠،٤)

قاعدة الهرم هى المثلث و أ ب القائم الزاوية فى و

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الأرتفاع

∴ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}(\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣) \times ٤ = ٦$ وحدة مكعبة

✱ الزاوية بين مستويين :



قياس الزاوية بين مستويين هو قياس الزاوية بين متجهى الإتجاه العمودين عليهما

فإذا كان $\overrightarrow{ن}_١ ، \overrightarrow{ن}_٢$ هما المتجهين العمودين على المستويين

فإن قياس الزاوية θ بين المستويين تعطى بالعلاقة:

$$جتا\theta = \frac{|\overrightarrow{ن}_١ \bullet \overrightarrow{ن}_٢|}{\|\overrightarrow{ن}_١\| \; \|\overrightarrow{ن}_٢\|}$$ حيث $٠ \le \theta \le ٩٠^\circ$

ملاحظات:

١) إذا كان جتا$\theta = ١$ فإن $\theta = ٠^\circ$ ويكون المستويان متوازيان أو منطبقان

٢) إذا كان جتا$\theta = ٠$ فإن $\theta = ٩٠^\circ$ ويكون المستويان متعامدان

٣) إذا كان ٠ < جتاθ < ١ فإن $٠ < \theta < ٩٠^\circ$ ويكون المستويان متقاطعان

🕮 مثـــال:

إوجد قياس الزاوية بين المستويين $س - ٣ص + ٢ع = ٠$ ، $٢س + ص - ع = ٣$

✍ الحـــل:

∵ إحداثيات المتجه العمودى على المستوى هى معاملات س ، ص ، ع فى المعادلة العامة للمستوى

$\therefore \overleftarrow{ن_1} = (1، -3، 2)$ ، $\overleftarrow{ن_2} = (2، 1، -1)$

$$جتا\theta = \frac{|(1، -3، 2)\cdot(2، 1، -1)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|2-3-2|}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

$$\therefore \theta = جتا^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{84}}\right) = 70° \ 53' \ 36''$$

✵ الزاوية بين مستقيم ومستوى :

الزاوية بين مستقيم ومستوى أو زاوية ميل المستقيم على المستوى هى الزاوية المتممة لقياس الزاوية θ المحصورة بين متجه الإتجاه للمستقيم $\overleftarrow{هـ}$ ومتجه العمودى على المستوى $\overleftarrow{ن}$

$\therefore$ **الزاوية بين مستقيم ومستوى** $= 90° - \theta$ **حيث** $جتا\theta = \frac{|\overleftarrow{هـ}\cdot\overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{هـ}||\,||\overleftarrow{ن}||}$

🕮 مثـــال:

اثبت أن المستقيم $\frac{س-1}{2} = \frac{ص+3}{-1} = \frac{ع}{3}$ **يقطع المستوى** $3س + 2ص + ع - 8 = 0$ **فى نقطة ثم أوجد زاوية ميل المستقيم على المستوى.**

✍ الحـــل:

لإيجاد نقط التقاطع نحل معادلتى المستقيم والمستوى

بوضع $\frac{س-1}{2} = \frac{ص+3}{-1} = \frac{ع}{3} = ك$

$\therefore س - 1 = 2ك$ ، $ص + 3 = -ك$ ، $ع = 3ك$

$\therefore س = 1 + 2ك$ ، $ص = -3 - ك$

بالتعويض فى معادلة المستوى

$\therefore 3(1+2ك) + 2(-3-ك) + 3ك - 8 = 0$

$\therefore 3 + 6ك - 6 - 2ك + 3ك - 8 = 0$ $\therefore 7ك = 11$ $\therefore ك = \frac{11}{7}$

$\therefore س = 1 + 2 \times \frac{11}{7} = \frac{29}{7}$ ، $ص = -3 - \frac{11}{7} = \frac{-32}{7}$ ، $ع = 3 \times \frac{11}{7} = \frac{33}{7}$

نقطة التقاطع هى $\left(\frac{29}{7}، \frac{-32}{7}، \frac{33}{7}\right)$

لإيجاد زاوية ميل المستقيم على المستوى نوجد الزاوية θ بين متجه الإتجاه $\overleftarrow{هـ}$ ومتجه العمودى $\overleftarrow{ن}$

∵ $\overleftarrow{هـ} = (٢، -١، ٣)$ ، $\overleftarrow{ن} = (٣، ٢، ١)$

$$∴ جتا\theta = \frac{|\overleftarrow{هـ} \bullet \overleftarrow{ن}|}{||\overleftarrow{هـ}||\ ||\overleftarrow{ن}||} = \frac{|(٢، -١، ٣) \bullet (٣، ٢، ١)|}{\sqrt{٢^٢ + (-١)^٢ + ٣^٢} \times \sqrt{٣^٢ + ٢^٢ + ١^٢}}$$

$$= \frac{|٦ - ٢ + ٣|}{\sqrt{١٤} \times \sqrt{١٤}} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢} \qquad ∴ \theta = ٦٠^\circ$$

∴ زاوية ميل المستقيم على المستوى $= ٩٠^\circ - ٦٠^\circ = ٣٠^\circ$

✸ المستويان المتوازيان والمستويان المتعامدان :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$، $\overleftarrow{ن_٢}$ هما متجهى الإتجاه العمودين على المستويين فإن:

١) المستويين متوازيين إذا كان $\overleftarrow{ن_١} \parallel \overleftarrow{ن_٢}$ وهذا الشرط يمكن تحقيقه بصور مختلفة هى:

١ – $\overleftarrow{ن_١} = ك\overleftarrow{ن_٢}$

٢ – $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$

٣ – $\overleftarrow{ن_١} \times \overleftarrow{ن_٢} = \overleftarrow{٠}$

٢) المستويين متعامدين إذا كان $\overleftarrow{ن_١} \bullet \overleftarrow{ن_٢} = ٠$ أى إذا كان $أ_١أ_٢ + ب_١ب_٢ + جـ_١جـ_٢ = ٠$

ملاحظة:

١) إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢} \neq \frac{د_١}{د_٢}$ فإن المستويين متوازيان وغير منطبقين

٢) إذا كان $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{د_١}{د_٢}$ فإن المستويين منطبقين

مثال:

إذا كان المستوى س – ٣ص + ع = ٤ عمودى على المستوى أس + ٢ص + ٢ع = ٢ فماقيمة أ

الحل:

∵ المستويان متعامدان ∴ $أ_١أ_٢ + ب_١ب_٢ + جـ_١جـ_٢ = ٠$

∴ ١ × أ − ٣ × ٢ + ١ × ٢ = ٠   ∴ أ − ٦ + ٢ = ٠   ∴ أ = ٤

✹ معادلة خط تقاطع مستويين :

إذا كان $\overleftarrow{ن_١}$ = (أ$_١$، ب$_١$، جـ$_١$)، $\overleftarrow{ن_٢}$ = (أ$_٢$، ب$_٢$، جـ$_٢$) هما متجهى الإتجاه العمودين على مستويين

وكانت النسب $\frac{أ_١}{أ_٢}$، $\frac{ب_١}{ب_٢}$، $\frac{جـ_١}{جـ_٢}$ ليست جميعها متساوية فإن المستويين يتقاطعان فى خط مستقيم ويمكن إيجاد معادلة خط التقاطع بأكثر من طريقة كما سيتضح من خلال المثال التالى.

مثـــال:

أوجد معادلة خط تقاطع المستويين ٣س − ص + ٢ع = ٣ ، س − ٢ص + ٥ع = ٢

الحـــل:

الطريقة الأولى: إيجاد متغيرين بدلالة الثالث

بحذف س من المعادلتين وذلك بضرب المعادلة الثانية فى − ٣ والجمع مع المعادلة الأولى

∴ ٥ص − ١٣ع = −٣   ومنها   ١٣ع = ٥ص + ٣   ∴ ع = $\frac{٥ص + ٣}{١٣}$

بحذف ص من المعادلتين وذلك بضرب المعادلة الأولى فى − ٢ والجمع مع المعادلة الثانية

− ٥س + ع = −٤   ومنها   ع = ٥س − ٤

المعادلة الإحداثية لخط التقاطع هى: $\frac{٥س − ٤}{١} = \frac{٥ص + ٣}{١٣} = \frac{ع}{١}$

الطريقة الثانية: إيجاد المتغيرات الثلاثة بدلالة ك

بحذف س من المعادلتين وذلك بضرب المعادلة الثانية فى − ٣ والجمع مع المعادلة الأولى

∴ ٥ص − ١٣ع = −٣   بفرض ع = ك

∴ ٥ص − ١٣ك = −٣   ∴ ٥ص = −٣ + ١٣ك   ∴ ص = $\frac{−٣ + ١٣ك}{٥}$

∴ س − ٢ × $\frac{−٣ + ١٣ك}{٥}$ + ٥ك = ٢   ∴ س = $\frac{٤ + ك}{٥}$

المعادلات البارمترية لخط التقاطع هى: س = $\frac{٤ + ك}{٥}$ ، ص = $\frac{−٣ + ١٣ك}{٥}$ ، ع = ك

الطريقة الثالثة: إيجاد متجه اتجاه خط التقاطع ونقطة عليه

∵ خط التقاطع عمودى على المتجهين $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$ العموديين على المستويين

متجه أتجاه خط التقاطع $\overleftarrow{هـ}$ يساوى حاصل الضرب الإتجاهى للمتجهين $\overleftarrow{ن_١}$ ، $\overleftarrow{ن_٢}$

$$∴ \overleftarrow{هـ} = \overleftarrow{ن_١} \times \overleftarrow{ن_٢} = \begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٣ & -١ & ٢ \\ ١ & -٢ & ٥ \end{vmatrix} = -\overleftarrow{س} - ١٣\overleftarrow{ص} - ٥\overleftarrow{ع}$$

لأيجاد نقطة على خط التقاطع نضع س = ١ (أو أى رقم آخر) فى معادلتى المستويين

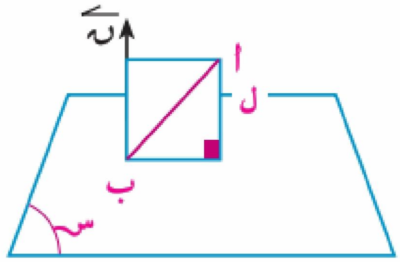
∴ − ص + ٢ع = ٠ ، − ٢ص + ٥ع = ١ بضرب الأولى فى − ٢ والجمع

∴ ع = ١ بالتعويض ∴ − ص + ٢ = ٠ ∴ ص = ٢

النقطة (١، ٢، ١) تقع على خط التقاطع

المعادلة المتجهه لخط التقاطع هى:

$$\overleftarrow{ر} = (١، ٢، ١) + ك(−١، −١٣، −٥)$$



✸ طول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت أ = (س١، ص١، ع١) نقطة خارج المستوى س

وكانت ب نقطة معلومة على المستوى ، $\overleftarrow{ن}$ متجه الإتجاه العمودى على المستوى فإن:

بعد النقطة أ عن المستوى يساوى طول مسقط المتجه $\overleftarrow{ب أ}$ على المتجه العمودى $\overleftarrow{ن}$ أى أن:

$$ل = \frac{\left| \overleftarrow{ب أ} \cdot \overleftarrow{ن} \right|}{\| \overleftarrow{ن} \|}$$

مثـــال:

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−٢، ١، ٤) على المستوى الذى معادلته $\overleftarrow{ر}$ • (١، −٣، ٢) = ٥

الحـــل:

لايجاد بعد النقطة عن المستوى يجب معرفة: ١) نقطة تنتمى للمستوى ٢) متجه العمودى على المستوى

ومن معادلة المستوى نـجد أن متجه العمودى على المستوى هو $\overleftarrow{ن} = (١، -٣، ٢)$

ولإيجاد نقطة تنتمى للمستوى نفرض أن المستوى يقطع محور س فى النقطة (س، ٠، ٠)

∴ (س، ٠، ٠)•(١، −٣، ٢) = ٥ ∴ س = ٥ ∴ النقطة ب = (٥، ٠، ٠) تقع على المستوى

∴ $\overleftarrow{ب أ} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} = (-٢، ١، ٤) - (٥، ٠، ٠) = (-٧، ١، ٤)$

∴ طول العمود ل $= \frac{|(-٧، ١، ٤)\bullet(١، -٣، ٢)|}{\sqrt{١^٢ + (-٣)^٢ + ٢^٢}} = \frac{|-٧ - ٣ + ٨|}{\sqrt{١٤}} = \frac{٢}{\sqrt{١٤}}$ وحدة طول

✱ الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من نقطة إلى مستوى :

إذا كانت أ نقطة خارج المستوى سـ ، $\overleftarrow{ن}$ متجه الإتجاه العمودى على المستوى فإن الصورة الإحداثية لطول العمود المرسوم من أ على المستوى سـ هى:

$$ل = \frac{|أس_١ + بص_١ + جع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢}}$$

حيث: (أ، ب، ج) إحداثيات متجه العمودى $\overleftarrow{ن}$ أو معاملات س ، ص ، ع فى المعادلة العامة للمستوى ، $(س_١، ص_١، ع_١)$ إحداثيات النقطة أ ، د الحد المطلق فى معادلة المستوى وهى على الصورة الصفرية

📖 مثال:

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (−١، ٤، ٠) على المستوى الذى معادلته س − ٢ص − ع = ٤

✍ الحل:

$$ل = \frac{|أس_١ + بص_١ + جع_١ + د|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢}} = \frac{|١ \times (-١) + (-٢) \times ٤ + ٠ - ٤|}{\sqrt{١^٢ + (-٢)^٢ + (-١)^٢}} = \frac{١٣}{\sqrt{٦}}$$ وحدة طول

📖 مثال:

اثبت أن المستويين ٣س + ٦ص + ٦ع = ٤ ، س + ٢ص + ٢ع = ١ متوازيان ، وأوجد البعد بينهما.

✍ الحل:

المستويان يكونا متوازيين إذا كان:

$$\overleftarrow{ن_1} = ك\,\overleftarrow{ن_2} \quad \text{أو} \quad \frac{أ_1}{أ_2}=\frac{ب_1}{ب_2}=\frac{جـ_1}{جـ_2} \quad \text{أو} \quad \overleftarrow{ن_1} \times \overleftarrow{ن_2} = \overleftarrow{٠}$$

ومن معادلة المستويين نـجد أن: $\overleftarrow{ن_1} = (٣،٦،٦)$ ، $\overleftarrow{ن_2} = (١،٢،٢)$

$\therefore \overleftarrow{ن_1} = (٣،٦،٦) = ٣(١،٢،٢) = ٣\,\overleftarrow{ن_2}$ $\therefore$ المستويان متوازيان

لإيجاد البعد بينهما نوجد نقطة على إحدهما ثم نوجد طول العمود المرسوم من هذه النقطة إلى المستوى الآخر ولإيجاد نقطة على أحد المستويين نفرض قيمتين لأى إحداثيين ثم نوجد قيمة الإحداثى الثالث

فمثلا: لإيجاد نقطة على المستوى الثانى نضع ص = ٠ ، ع = ٠ $\therefore$ س = ١

النقطة (١،٠،٠) تقع على المستوى الثانى

ويكون طول العمود المرسوم منها إلى المستوى الأول $ل = \frac{|٣\times١+٠+٠-٤|}{\sqrt{٣^2+٦^2+٦^2}} = \frac{١}{٩}$ وحدة طول

ملاحظات هامة جدا:

١) النقطة تقع فى المستوى إذا كانت تحقق معادلته

٢) المستقيم يقع فى المستوى إذا كان يوازى المستوى ووجدت نقطة على المستقيم تحقق معادلة المستوى

٣) المستقيم يوازى المستوى إذا كان متجه الإتجاه للمستقيم عمودى على متجه العمودى للمستوى أى

إذا كان $\overleftarrow{هـ} \perp \overleftarrow{ن}$ $\therefore \overleftarrow{هـ} \bullet \overleftarrow{ن} = ٠$

٤) المستقيم يكون عمودى على المستوى إذا كان متجه الإتجاه للمستقيم يوازى متجه العمودى

للمستوى أى إذا كان $\overleftarrow{هـ} \parallel \overleftarrow{ن}$

$$\therefore \overleftarrow{هـ} \times \overleftarrow{ن} = \overleftarrow{٠} \quad \text{أو} \quad \overleftarrow{هـ} = ك\,\overleftarrow{ن} \quad \text{أو} \quad \frac{أ_1}{أ_2}=\frac{ب_1}{ب_2}=\frac{جـ_1}{جـ_2}$$

مثـــــال:

اثبت أن النقطة أ(٢،٣،١) والمستقيم

ل: $\overleftarrow{ر} = (٣\overleftarrow{س} + \overleftarrow{ص} + ٣\overleftarrow{ع}) + ك(\overleftarrow{س} - ٢\overleftarrow{ص} + ٢\overleftarrow{ع})$ يقعان فى المستوى الذى

معادلته $\overleftarrow{ر} \bullet (٢\overleftarrow{س} - \overleftarrow{ع}) = ٣$

الحـــل:

بالتعويض بالنقطة أ(٢،٣،١) فى الطرف الأيمن لمعادلة المستوى

الطرف الأيمن = (٢،٣،١) • (٢،٠،–١) = ٤ + ٠ – ١ = ٣ = الأيسر

∵ النقطة تحقق معادلة المستوى ∴ النقطة أ(٢،٣،١) تقع فى المستوى #

من معادلة المستقيم نجد أن هـ⃗ = (١، –٢، ٢) والنقطة (٣،١،٣) تقع على المستقيم ل

ومن معادلة المستوى نجد أن ن⃗ = (٢،٠، –١)

∴ هـ⃗ • ن⃗ = (١، –٢، ٢) • (٢، ٠، –١) = ٢ + ٠ – ٢ = ٠ ∴ المستقيم ل يوازى المستوى (١)

بالتعويض بالنقطة (٣،١،٣) فى الطرف الأيمن معادلة المستوى

الطرف الأيمن = (٣،١،٣) • (٢،٠، –١) = ٦ + ٠ – ٣ = ٣ = الأيسر

∵ النقطة تحقق معادلة المستوى ∴ النقطة (٣،١،٣) تقع فى المستوى (٢)

من (١) ، (٢) ∴ المستقيم ل يقع فى المستوى #

مثـــال:

إذا مر المستوى ٢أس – ٣أص + ٤أع + ٦ = ٠ بمنتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين مركزى الكرتين س² + ص² + ع² + ٦س – ٨ص – ٢ع = ١٣ ، س² + ص² + ع² – ١٠س + ٤ص – ٢ع = ٨ فما قيمة أ ؟

الحـــل:

∵ مركز الكرة الأولى م = (–٣، ٤، ١) ، مركز الكرة الثانية ن = (٥، –٢، ١)

∴ منتصف م ن = ((–٣ + ٥)/٢ ، (٤ – ٢)/٢ ، (١ + ١)/٢) = (١،١،١)

∵ المستوى يمر بنقطة المنتصف م ن ∴ نقطة منتصف م ن تحقق معادلة المستوى

٢أ × ١ – ٣أ × ١ + ٤أ × ١ + ٦ = ٠ ∴ ٣أ = –٦ ∴ أ = –٢

مثـــال:

اثبت أن المستقيم ر⃗ = ع⃗ + ك(٢س⃗ + ٣ص⃗ + ٤ع⃗) عمودى على المستوى الذى معادلته

س + ٣/٢ ص + ٢ع = ٥

الحـــل:

من معادلة المستقيم نجد أن $\overrightarrow{ه} = (٢ ، ٣ ، ٤)$ ومن معادلة المستوى نجد أن $\overrightarrow{ن} = (١ ، \frac{٣}{٢} ، ٢)$

$\because \frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{٢}{١} = ٢$ ، $\frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = ٢$ ، $\frac{جـ_١}{جـ_٢} = \frac{٤}{٢} = ٢$

$\therefore \frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{جـ_١}{جـ_٢}$ $\therefore \overrightarrow{ه} \parallel \overrightarrow{ن}$ $\therefore$ المستقيم عمودى على المستوى

ملاحظة:

لإيجاد نقطة تقاطع ثلاث مستويات نحل معادلات المستويات الثلاثة باستخدام طريقة كرامر

مثـــال:

أوجد نقطة تقاطع المستويات ٢س + ص − ع = −١ ، س + ص + ع − ٢ = ٠
، ٣س − ص − ع = ٦

الحـــل:

نحل معادلات المستويات الثلاثة باستخدام طريقة كرامر

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-١ + ١) - (-١ - ٣) - (-١ - ٣) = ٨$$

$$، \Delta_{س} = \begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -١ & -١ \end{vmatrix} = -(-١ + ١) - (-٢ - ٦) - (-٢ - ٦) = ١٦$$

$$، \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ & -١ \end{vmatrix} = ٢(-٢ - ٦) + (-١ - ٣) - (٦ - ٦) = -٢٠$$

$$، \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٦ \end{vmatrix} = ٢(٦ + ٢) - (٦ - ٦) - (-١ - ٣) = ٢٠$$

$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{١٦}{٨} = ٢$ ، $ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٠}{٨} = \frac{-٥}{٢}$ ، $ع = \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$

$\therefore$ نقطة التقاطع للمستويات الثلاثة هى $(٢ ، \frac{-٥}{٢} ، \frac{٥}{٢})$

مثــــال:

إذا كان المستوى س يحوى النقط أ = (١، ٤، ٢) ، ب = (١، ٠، ٥) ، جـ = (٠، ٨، −١) وكان المستوى ص يحوى النقطة هـ = (٢، ٢، ٣) والمتجه $\overleftarrow{ن}$ = (١، ٢، ٢) عمودى عليه أوجد:

(أ) المعادلة الإحداثية للمستوى س (ب) المعادلة الإحداثية للمستوى ص

(جـ) إذا كانت النقطة (ط، ٠، ف) تقع فى كل من المستويين س، ص فما قيمة كل من ط، ف

(د) اوجد الصورة المتجهه لخط تقاطع المستويين س، ص

(هـ) إذا كانت النقطة (١، ١، ن) على أبعاد متساوية من المستويين س، ص إوجد قيم ن الممكنة.

الحـــل:

(أ) المعادلة الإحداثية للمستوى س

∵ معادلة المستوى المار بثلاث نقط هى

$$\begin{vmatrix} \text{س} - \text{س}_1 & \text{ص} - \text{ص}_1 & \text{ع} - \text{ع}_1 \\ \text{س}_2 - \text{س}_1 & \text{ص}_2 - \text{ص}_1 & \text{ع}_2 - \text{ع}_1 \\ \text{س}_3 - \text{س}_1 & \text{ص}_3 - \text{ص}_1 & \text{ع}_3 - \text{ع}_1 \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{س} - ١ & \text{ص} - ٤ & \text{ع} - ٢ \\ ١ - ١ & ٠ - ٤ & ٥ - ٢ \\ ٠ - ١ & ٨ - ٤ & -١ - ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{س} - ١ & \text{ص} - ٤ & \text{ع} - ٢ \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٠ \quad \text{باجراء } \text{ص}_3 + \text{ص}_2$$

$$\therefore \begin{vmatrix} \text{س} - ١ & \text{ص} - ٤ & \text{ع} - ٢ \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ -١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ٠ \quad \text{بالفك بـ } \text{ص}_3$$

∴ ٣(ص − ٤) + ٤(ع − ٢) = ٠

∴ ٣ص − ١٢ + ٤ع − ٨ = ٠ **∴ ٣ص + ٤ع − ٢٠ = ٠**

(ب) المعادلة الإحداثية للمستوى ص

∵ $\overleftarrow{ن}$ = (١، ٢، ٢) ، هـ = (٢، ٢، ٣) ∴ $\overleftarrow{ن}$ • $\overleftarrow{هـ}$ = −د

∴ (١، ٢، ٢) • (٢، ٢، ٣) = −د ∴ ٢ + ٤ + ٦ = −د ∴ د = −١٢

∵ المعادلة الإحداثية للمستوى هى (أ، ب، جـ) • (س، ص، ع) = −د

∴ (١، ٢، ٢) • (س، ص، ع) = ١٢ **∴ س + ٢ص + ٢ع − ١٢ = ٠**

(ج) ∵ النقطة (ط، ٠، ف) تقع فى كل من المستويين س، ص

∴ النقطة (ط، ٠، ف) تحقق معادلة المستويين بالتعويض فى معالة المستويين

∴ ٣ × ٠ + ٤ × ف = ٢٠ ∴ ٤ف = ٢٠ **∴ ف = ٥**

، ط + ٢ × ٠ + ٢ × ٥ = ١٢ ∴ ط + ١٠ = ١٢ **∴ ط = ٢**

(ء) الصورة المتجهه لخط تقاطع المستويين س، ص

∵ $\overleftarrow{ن}_1$ = (٠، −٣، −٤) ، $\overleftarrow{ن}_2$ = (١، ٢، ٢)

∴ $\overleftarrow{ه}$ = $\overleftarrow{ن}_1 \times \overleftarrow{ن}_2$ =
$$\begin{vmatrix} \overleftarrow{س} & \overleftarrow{ص} & \overleftarrow{ع} \\ ٠ & -٣ & -٤ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٢\overleftarrow{س} - ٤\overleftarrow{ص} + ٣\overleftarrow{ع}$$

∵ (٢، ٠، ٥) تقع فى كل من المستويين س، ص ∴ (٢، ٠، ٥) تقع على خط تقاطع المستويين

∴ المعادلة المتجهه لخط التقاطع هى: **$\overleftarrow{ر}$ = (٢، ٠، ٥) + ك(٢، −٤، ٣)**

(ه) ∵ النقطة (١، ١، ن) على أبعاد متساوية من المستويين س، ص

، ∵ معادلة المستويين هما ٣ص + ٤ع − ٢٠ = ٠ ، س + ٢ص + ٢ع − ١٢ =

∴ ل₁ = ل₂ ∴
$$\frac{|٠ + ٣ + ٤ن - ٢٠|}{\sqrt{٠^٢ + ٣^٢ + ٤^٢}} = \frac{|١ + ٢ + ٢ن - ١٢|}{\sqrt{١^٢ + ٢^٢ + ٢^٢}}$$

∴ $\frac{|٤ن - ١٧|}{٥} = \frac{|٢ن - ٩|}{٣}$ ∴ ٣|٤ن − ١٧| = ٥|٢ن − ٩|

∴ ٣(٤ن − ١٧) = ± ٥(٢ن − ٩)

∴ ٣(٤ن − ١٧) = ٥(٢ن − ٩) أو ٣(٤ن − ١٧) = − ٥(٢ن − ٩)

∴ ١٢ن − ٥١ = ١٠ن − ٤٥ ∴ ١٢ن − ٥١ = −١٠ن + ٤٥

∴ ١٢ن − ١٠ن = −٤٥ + ٥١ ∴ ١٢ن + ١٠ن = ٤٥ + ٥١

∴ ٢ن = ٦ ∴ ٢٢ن = ٩٦

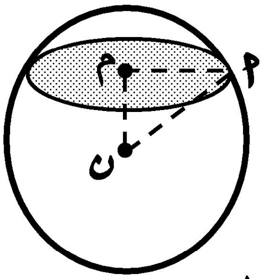
∴ ن = ٣ **∴ ن = $\frac{٤٨}{١١}$**

مثـــال:

إذا قطع المستوى ٢س – ص – ٢ع + ١٢ = ٠

الكرة (س + ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع – ١)^{٢} = ١٥ أوجد مساحة المقطع الناتج.

الحـــل:



مقطع الكرة بإى مستوى هو سطح دائرة

ويكون المستقيم المار بمركز الكرة (ن) ومركز الدائرة (م) عمودى على المستوى

∴ م ن = طول العمود المرسوم من مركز الكرة (ن) على المستوى

∵ مركز الكرة ن = (–٣، –٢، ١) ومعادلة المستوى ٢س – ص – ٢ع + ١٢ = ٠

∴ م ن = ل = $\frac{|-٦ + ٢ - ٢ + ١٢|}{\sqrt{٢^{٢} + (-١)^{٢} + (-٢)^{٢}}} = \frac{٦}{٣}$ = ٢ وحدة طول

ونصف قطر الكرة أن = $\sqrt{١٥}$ وهو وتر لمثلث قائم فيه ضلعى القائمة هما م ن ، نصف قطر الدائرة نق

∴ نق = أم = $\sqrt{(\text{أن})^{٢} - (\text{م ن})^{٢}}$ = $\sqrt{(\sqrt{١٥})^{٢} - ٢^{٢}}$ = $\sqrt{١١}$ وحدة طول

∴ مساحة المقطع الناتج = مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١١ π وحدة مربعة

" تم بفضل الله منهج الهندسة الفراغية "

مع اطيب تمنياتى بالنجاح والتفوق إن شاء الله ،،،،،،،

مهندس / السيد محمود